Anwendung der Ausdehnungslehre

auf

die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.

I. Teil: Raumkurven.

Von

Hermann Grafsmann.

Beilage zum Programm der Lateinischen Hauptschule zu Halle a. S.

Ostern 1886.

Halle a. S.,

Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses.

1886.

1886. Progr. Nr. 217.

Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Erster Teil: Raumkurven.

Die Schwierigkeiten, welche sich dem Studium der Ausdehnungslehre auch heute noch entgegenstellen, beruhen einerseits in der ungewöhnlichen Abstraktheit und Allgemeinheit ihrer Untersuchungen; andererseits aber kommt in Betracht, dafs bei der verhältnismäfsig geringen Zahl von Anwendungen, welche ihre Methoden bisher gefunden, die Operationen der Ausdehnungslehre für den Leser etwas Ungewohntes und Fremdartiges behalten, so dafs derselbe meist nicht zur vollen Herrschaft über den Stoff gelangt. Es schien mir daher nicht unwichtig, durch eine neue Anwendung der Ausdehnungslehre auf einen konkreten, allgemein bekannten Gegenstand das Verständnis ihrer Schlufsweise und die Vertrautheit mit ihren Operationen fördern zu helfen. Die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen zeigte sich hierfür in so fern besonders geeignet, als für ihre Entwickelung die leicht verständliche und durch Anschaulichkeit ausgezeichnete Verknüpfung von Strecken ausreicht, während die Rechnung mit Punkten ganz von der Untersuchung ausgeschlossen bleiben darf. Diese Beschränkung in den zu verwertenden Hülfsmitteln der Ausdehnungslehre ermöglicht es, die benutzten Begriffe und Sätze dieser Theorie wenigstens so weit zu entwickeln und zu begründen, um das Mifstrauen des Lesers gegen die ungewohnten Methoden beseitigen und eine gewisse Geläufigkeit in der Verwendung der neu eingeführten Rechnungsoperationen erzielen zu können. Im Hinblick auf diesen Zweck habe ich in denjenigen Abschnitten der folgenden Abhandlung, welche von den Hülfsmitteln aus der Ausdehnungslehre handeln, oft ein mehr verifizierendes als streng deduktives Verfahren eingeschlagen, was um so eher statthaft schien, als in letzterer Hinsicht die beiden Werke meines Vaters über die Ausdehnungslehre*) jede irgend wünschenswerte Auskunft gewähren.

Erster Abschnitt.
Hülfsmittel aus der Ausdehnungslehre.

Im Gegensatz zu der gewöhnlichen analytischen Geometrie, welche an Stelle der geometrischen Gröfsen — der Punkte, Strecken, Flächenräume — gewisse für dieselben charakteristische Zahlen einführt, mit diesen Zahlen rechnet und schliefslich die Resultate der analytischen Entwickelung wieder in die geometrische Sprache übersetzt, unterwirft die Ausdehnungslehre jene Gröfsen direkt der Rechnung, sie addiert, multipliziert und differenziert dieselben unmittelbar,

*) Grafsmann, Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik (Leipzig, Wigand, 1844; zweite Auflage 1878) und: Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet (Berlin, Enslin, 1862).

ohne sie vorher ihres geometrischen Gewandes entkleidet zu haben. Insofern nun aber zwei solche geometrischen Gebilde, z. B. zwei verschieden gerichtete Strecken, als ungleich benannte Gröſsen erscheinen, welche zu addieren oder zu multiplizieren die gewöhnliche Arithmetik nicht gestattet, wird es notwendig, die Verknüpfungen solcher Gröſsen neu zu erklären. Die Aufstellung dieser Definitionen und die Ableitung der Gesetze jener Verknüpfungen bilden den Hauptinhalt der Ausdehnungslehre.

Unter einer Strecke sei stets eine Linie von bestimmter Länge und Richtung verstanden, d. h. es seien zwei Strecken dann und nur dann einander gleich gesetzt, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben. Die Addition der Strecken definieren wir durch die Vorschrift: Man addiert zwei Strecken a und b, indem man sie stetig aneinander legt d. h. die zweite parallel zu sich so weit verschiebt, bis ihr Anfangspunkt auf den Endpunkt der ersten fällt; dann ist die Strecke c vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der zweiten die Summe beider (Fig. 1). Aus der Gleichung $c = a + b$ folgt $b = c - a$, d. h. die Differenz zweier Strecken konstruiert man, indem man die Strecken mit ihren Anfangspunkten aneinander legt; dann ist die Strecke vom Endpunkt des Subtrahendus bis zum Endpunkt des Minuendus die Differenzstrecke. Es läſst sich zeigen, daſs für diese Verknüpfungen alle Gesetze der gewöhnlichen Addition und Subtraktion gültig bleiben, und jedes von diesen Gesetzen drückt einen besonderen geometrischen Satz aus, z. B. die Formel $a - b + b = a$ den Satz: Ist in einem Viereck ein Paar Gegenseiten gleich und parallel, so gilt dasſelbe auch von dem andern Paar (Fig. 2).

Fig. 1.

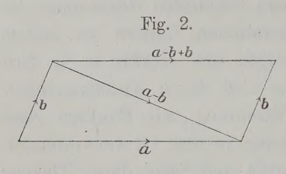
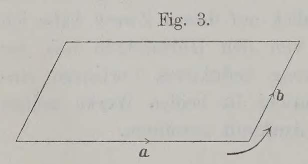


Fig. 2.



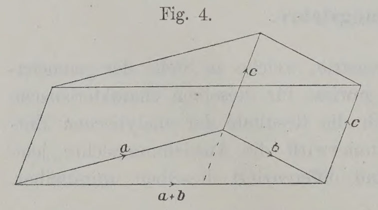
Unter dem äuſseren Produkt $[ab]$ zweier Strecken a und b, welches zur Unterscheidung von anderen Produktbildungen durch „scharfe" Klammern umschlossen wird, sei der Flächenraum desjenigen Parallelogramms verstanden, welches durch die Strecken a und b bestimmt wird (Fig. 3), und sei an diesem Flächenraum auſser seiner Gröſse die Stellung seiner Ebene und die Umlaufsrichtung festgehalten, d. h. es seien zwei solche Flächenräume dann und nur dann einander gleich gesetzt, wenn sie gleichen Inhalt haben, in parallelen Ebenen liegen und in gleichem Sinne umlaufen werden. Die wichtigsten Gesetze der Multiplikation bleiben auch für diese Art multiplikativer Verknüpfung in Gültigkeit. Namentlich erweist sich das Gesetz, welches die Beziehung zur Addition ausdrückt,

$$[(a + b)c] = [ac] + [bc],$$

als richtig, so lange a, b und c einer Ebene angehören, die drei Flächenräume also gleichartig sind (Fig. 4). Ist hingegen jene Bedingung nicht erfüllt, gehört somit c nicht der Ebene ab an, und liegen also die Flächenräume $[ac]$ und $[bc]$ in verschiedene Ebenen, so kann unsere Formel als Definition der Summe solcher Flächenräume dienen. Es bestehen indes für die äuſseren Produkte auch noch einige besondere Gesetze, welche von denen der gewöhnlichen Multiplikation abweichen. So wird offenbar ein äuſseres

Fig. 3.

Fig. 4.



Produkt nicht nur dann null, wenn ein Faktor verschwindet, sondern auch, wenn beide Faktoren parallel sind; namentlich ist stets

1) . . . . $[a \cdot a] = 0.$

Fassen wir ferner in dieser Formel a als Summe zweier Strecken b und c auf, so wird

$$[(b+c)(b+c)] = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf 1) folgt

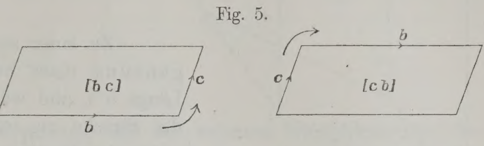
$$[cb] + [bc] = 0$$

oder

2) . . . . $[cb] = -[bc];$

d. h. ein äufseres Produkt ändert sein Zeichen, wenn man seine Faktoren miteinander vertauscht, oder geometrisch ausgedrückt: Bei Umkehrung der Umlaufsrichtung nimmt ein Flächenraum den entgegengesetzten Wert an (Fig. 5). Die Formeln 1) und 2) erinnern bereits an die Determinanten; und in der That ergeben sich die Fundamentalsätze der Determinantentheorie aus den Sätzen über äufsere Produkte auf's leichteste und unmittelbarste. Hier möge es genügen, noch zwei Formeln aufzustellen, welche ebenfalls auf diesen Zusammenhang hinweisen. Es leuchtet nach der Definition des äufseren Produktes sofort ein, dafs

Fig. 5.



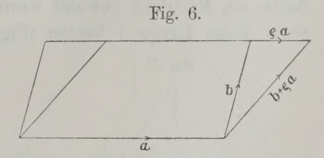
$$[\rho a \cdot b] = \rho [ab],$$

falls ρ eine Zahl bezeichnet. Dann aber folgt weiter mit Rücksicht auf 1), dafs

$$[ab] = [a(b + \rho a)],$$

eine Formel, welche geometrisch gedeutet den Satz ausdrückt: Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich (Fig. 6).

Fig. 6.



Unter dem äufseren Produkt dreier Strecken a, b, c sei der Inhalt des durch dieselben bestimmten Spates (Parallelepipedons) verstanden. Dieser Körperraum steht zu den bisher betrachteten Gebilden in einem gewissen Gegensatz. Während nämlich beispielsweise zum Begriff des Flächenraums neben der Gröfse und Umlaufsrichtung noch ein die Stellung im Raum bezeichnendes Attribut gehörte, fällt ein solches bei den dreifaktorigen Produkten fort. Alle diese Produkte erscheinen als gleichartige Gröfsen und können daher wie gleichbenannte Zahlen behandelt werden. Wählen wir als Mafs unserer Körperräume einen Würfel, dessen Kanten die Strecken e_1, e_2, e_3 sind (Fig 7), und setzen das Produkt $[e_1 e_2 e_3] = 1$, so wird jeder Körperraum $[abc]$ durch eine blofse Zahl dargestellt. Der einzige Unterschied, der zwischen den einzelnen Körperräumen noch hervortritt, ist die Ungleichheit in dem Sinn des Abbiegens der dritten Strecke gegen die beiden ersten. Diese Verschiedenheit aber läfst sich vollständig darstellen durch entgegengesetzte Vorzeichen der Volumzahl. Wir denken uns zur Bestimmung desselben den Spat $[abc]$ mit seiner Grundfläche $[ab]$ so auf die Fläche $[e_1 e_2]$ gestellt, dafs ihre Umlaufsrichtung mit der von $[e_1 e_2]$ übereinstimmt. Fällt dann c nach der Seite von e_3 hin, so geben wir dem Produkt das Pluszeichen, im entgegengesetzten Falle

Fig. 7.

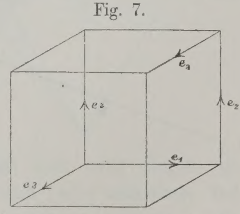
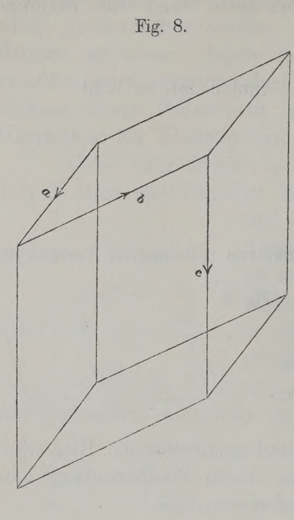


Fig. 8.



(Fig. 8) das Minuszeichen. Für dreifaktorige Produkte gelten nun wieder ganz analoge Gesetze wie für zweifaktorige. Namentlich wird

$$[ab(\alpha a + \beta b)] = 0,$$

wie sofort einleuchtet, wenn man bedenkt, daſs die Strecke $\alpha a + \beta b$ der Ebene ab angehört; ferner wird zufolge der obigen Zeichenregel

$$[acb] = -[abc]$$

und

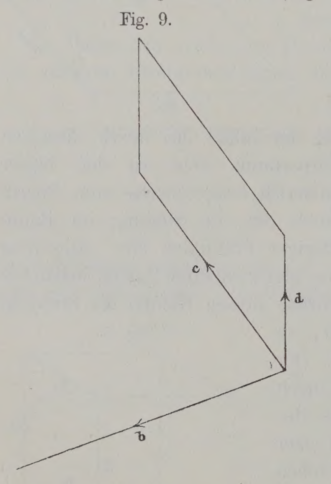
$$[cab] = +[abc]$$

in Übereinstimmung mit den entsprechenden Determinantensätzen. Hieran schlieſsen wir endlich noch die Definitionsformel

$$[a \cdot (bc)] = [abc] \text{ an.}$$

Zu einer neuen Produktbildung führt der Begriff der Ergänzung einer Strecke. Ist nämlich b eine Strecke von der Länge $\mathfrak{b}$*), und wählen wir als Zeichen der Ergänzung einen vor die Strecke zu setzenden senkrechten Strich, so verstehen wir unter der Ergänzung $|b$ einen Flächenraum $[cd]$, welcher auf b senkrecht steht, dessen Flächenzahl gleich der Längenzahl $\mathfrak{b}$ der Strecke b ist, und dessen Umlaufsrichtung so zu wählen ist, daſs das Produkt $[bcd]$ positiv wird. Insbesondere kann als Ergänzungsfläche ein Rechteck gewählt werden, dessen eine Seite c mit b gleich lang ist, während die andere Seite d die Länge 1 besitzt (Fig. 9).

Fig. 9.



Um den Zusammenhang des neuen Begriffs mit dem früheren enger zu gestalten, entwickeln wir zuerst die Beziehung, in welche die Ergänzung zur Addition der Strecken tritt, d. h. wir suchen die Ergänzung der Summe zweier Strecken a und b zu ermitteln. Dabei wird sich die Formel ergeben

$$3) \quad . \quad . \quad . \quad |(a+b) = |a + |b,$$

welche ausdrückt, daſs das Ergänzungszeichen distributiv ist. Zum Beweise derselben stellen wir die Ergänzungen von a und b als Rechtecke dar, deren eine Seite beide Mal die Länge 1 hat und Normale der Ebene ab ist, während die andere Seite bezüglich die Länge von a und b besitzt und auf der dazugehörigen Strecke innerhalb der Ebene ab senkrecht steht. Dann bilden a, b und $a+b$ die Seiten eines Dreiecks, und die Gröſsen $|a$, $|b$ und $|(a+b)$ die Seitenflächen eines dreiseitigen Prismas, dessen Seitenkanten auf der Ebene ab senkrecht stehen.

*) Als Maſseinheit für die Länge der Strecken ist dabei stets die Kante des Einheitswürfels, als Maſs für die Flächenräume dessen Grundfläche zu verwenden.

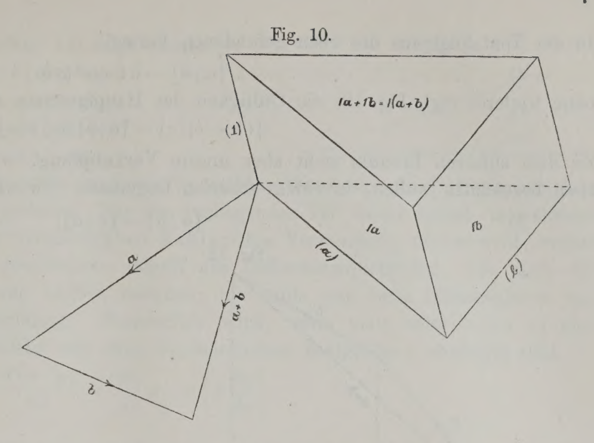
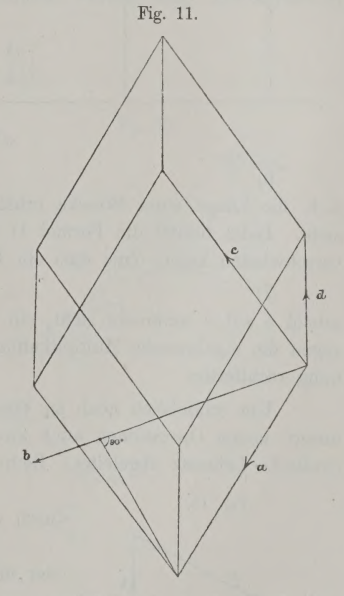


Fig. 10.

(Fig. 10). Es ist nnn zu zeigen, daſs die Seitenfläche $|a + |b$ die Ergänzung der Strecke $a + b$ ist. Dazu ist erforderlich, daſs die der Seitenfläche $|a + |b$ zugehörige Grundkante erstens die Länge der Strecke $a + b$ habe, zweitens auf derselben senkrecht stehe und drittens von $a + b$ aus betrachtet nach derselben Seite zu liegen scheine, wie die Grundkante der Fläche $|a$ von a aus gesehen. Diese drei Bedingungen sind aber in der That erfüllt, und somit ist unsere Formel 3) bewiesen.

Indem wir zweitens den Begriff der Ergänzung mit der äuſseren Multiplikation in Beziehung setzen, gelangen wir zu einer neuen Produktbildung. Bestimmen wir nämlich unserer obigen Festsetzung gemäſs den Wert des äuſseren Produktes einer Strecke a in die Ergänzung einer anderen Strecke b, so wird $[a \cdot |b] = [a \cdot (cd)] = [acd]$ d. h. gleich dem Volumen des Spates $[acd]$ oder, was dasſelbe ist, gleich der Flächenzahl von $[cd]$ multipliziert mit der Höhe des Spates $[acd]$ (Fig. 11). Die Flächenzahl von $[cd]$ soll aber übereinstimmen mit der Längenzahl von b, welche wieder durch $\mathfrak{b}$ bezeichnet sein möge, und die Höhe des Spates ist abgesehen vom Vorzeichen gleich der Längenzahl von a — sie heiſse $\mathfrak{a}$ — multipliziert mit dem cos (ab), so daſs wir erhalten $[a \cdot |b] = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ cos (ab); und diese Formel gilt auch dem Vorzeichen nach. Denn $[a \cdot |b]$, wofür wir nach obigem auch $[acd]$ oder $[cda]$ schreiben dürfen, wird zufolge unserer Festsetzung über die Umlaufsrichtung von $[cd]$ positiv, wenn a mit b auf derselben Seite von $[cd]$ liegt, im entgegengesetzten Falle negativ; gleiches gilt aber offenbar von cos (ab). Das Produkt $[a \cdot |b]$ läſst nun noch eine von dem vorhergehenden abweichende Auffassung zu, welche für das folgende von Wichtigkeit ist. Anstatt nämlich zu sagen, es sei in dem Produkt $[a \cdot |b]$ die Strecke a mit der Ergänzung von b verknüpft, können wir jenen Ausdruck auch so auffassen, als sei in ihm a direkt mit der Strecke b durch eine eigentümliche Art der Verknüpfung verbunden. Diese neue Auffassung läſst sich auch durch die Schrift sehr leicht zum Ausdruck bringen, indem wir anstatt $[a \cdot |b]$ einfach $[a|b]$ schreiben und also dem Ergänzungszeichen zugleich den Charakter eines Verknüpfungszeichens beilegen. Die Art dieser neuen Verknüpfung nun kennzeichnet sich sofort wieder als eine multiplikative.

Fig. 11.



In der That folgt aus der oben gefundenen Formel

4) . . . . $[a \mid b] = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \cos (ab)$

ohne weiteres (vgl. Fig. 12) die Gültigkeit des Hauptgesetzes aller Produktbildungen

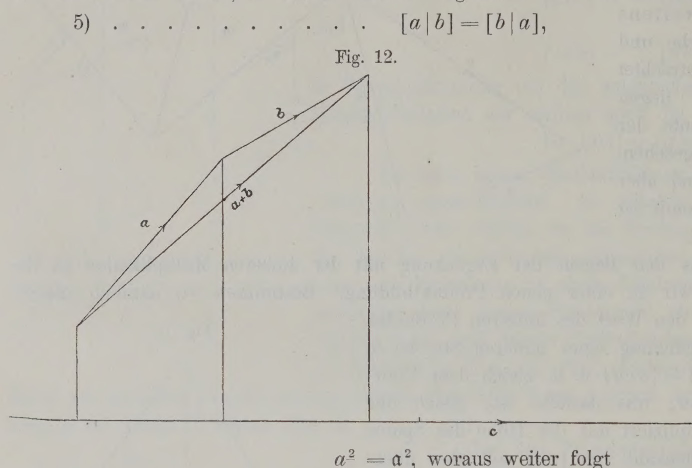
$$[(a + b) \mid c] = [a \mid c] + [b \mid c].$$

Zu dem äußeren Produkt steht aber unsere Verknüpfung, welche wir als innere Multiplikation bezeichnen wollen, in einem scharfen Gegensatz. So wird für das innere Produkt

5) . . . . $[a \mid b] = [b \mid a]$,

d. h. die Faktoren sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar. Hiermit hängt es zusammen, daſs für die innere Multiplikation auch die Formel 1) keine Gültigkeit besitzt. Bezeichnen wir nämlich die Länge der Strecke a wieder mit $\mathfrak{a}$ und das innere Quadrat von a $[a \mid a]$ kurz mit a^2, so wird mit Rücksicht auf 4)

Fig. 12.



$a^2 = \mathfrak{a}^2$, woraus weiter folgt

6) . . . . $\mathfrak{a} = \sqrt{a^2}$,

d. h. die Länge einer Strecke erhält man, indem man aus ihrem inneren Quadrat die Wurzel zieht. Indes besitzt die Formel 1) wenigstens ein Analogon, insofern auch ein inneres Produkt verschwinden kann, ohne daſs ein Faktor Null wird; denn es ist offenbar

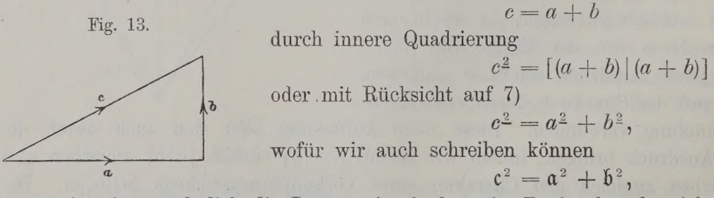
7) . . . . $[a \mid b] = 0$,

sobald b auf a senkrecht steht, ein Gesetz, welches zugleich den Gegensatz unserer Verknüpfung gegen die algebraische Multiplikation kennzeichnet und die Einführung einer besonderen Bezeichnung rechtfertigt.

Um schlieſslich noch an einem vorläufigen Beispiel zu zeigen, daſs die Definitionen für unsere neuen Operationen auch zweckmäſsig gewählt sind, werde mittelst derselben der Pythagoräische Lehrsatz abgeleitet. Beim rechtwinkligen Dreieck (vgl. Fig. 13) folgt aus der Gleichung

$$c = a + b$$

Fig. 13.



durch innere Quadrierung

$$c^2 = [(a + b) \mid (a + b)]$$

oder mit Rücksicht auf 7)

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

wofür wir auch schreiben können

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2,$$

wenn wir wie gewöhnlich die Längen durch deutsche Buchstaben bezeichnen.

Fürs schiefwinklige Dreieck (Fig. 14) folgt ebenso

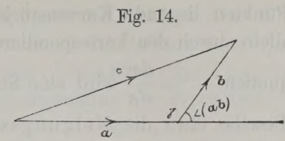


Fig. 14.

$$c^2 = a^2 + 2\,[a\,|\,b] + b^2$$

oder

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos(ab) + \mathfrak{b}^2$$
$$= \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\gamma.$$

Es bleibt endlich noch die Frage zu erledigen, in welcher Weise sich die Differenziation der Strecken und Streckenprodukte gestaltet. Für den vorliegenden Teil dieser Arbeit, in welchem allein die Differenziation nach einer veränderlichen Zahlgröfse Verwendung finden wird, bedarf es keiner neuen Definition. Der gewöhnliche Begriff des Differenzialquotienten, wie auch die Grundformeln der Differenzialrechnung bleiben bestehen; nur mufs man beim Differenzieren von Produkten mit einiger Vorsicht verfahren. Namentlich wird, wenn man unter $x = x\,(s)$ und $y = y\,(s)$ zwei Strecken versteht, welche von einer veränderlichen Zahlgröfse s abhängig sind,

$$8)\quad \frac{d\,[x \cdot y]}{ds} = \left[\frac{dx}{ds}\,y\right] + \left[x\,\frac{dy}{ds}\right]$$

und

$$9)\quad \frac{d\,[x\,|\,y]}{ds} = \left[\frac{dx}{ds}\,|\,y\right] + \left[x\,|\,\frac{dy}{ds}\right],$$

wobei in der Formel 8) die Reihenfolge der Faktoren nicht geändert werden darf. Die Formel 9) enthält noch die Spezialformel

$$\frac{d\,(x^2)}{ds} = \left[\frac{dx}{ds}\,|\,x\right] + \left[x\,|\,\frac{dx}{ds}\right],$$

d. h. mit Rücksicht auf 5)

$$10)\quad \frac{d(x^2)}{ds} = 2\left[x\,|\,\frac{dx}{ds}\right].$$

Zweiter Abschnitt.

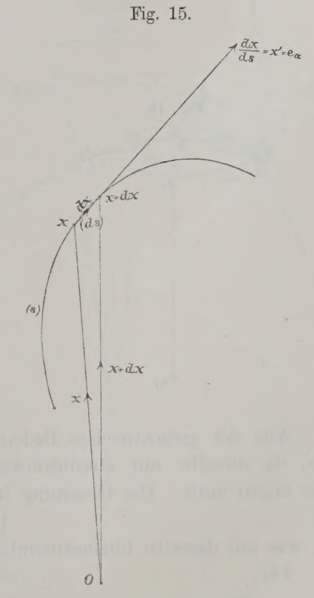
Tangente und Schmiegungsebene einer Raumkurve. Erste Krümmung.

Wir bezeichnen mit x die Strecke, welche von einem festen Punkte O aus nach einem im Raum veränderlichen Punkte P gezogen wird, und nennen diese Strecke den Träger des Punktes P; ist dann t eine variable Zahlgröfse, so stellt die Gleichung $x = x_{(t)}$ eine Raumkurve dar. Wählt man für t speziell die Länge s des Kurvenbogens, gerechnet von einem beliebig zu wählenden Anfangspunkte bis zum Punkte x, so nimmt die Gleichung die besondere Form an

$$11)\quad x = x_{(s)},$$

welche zunächst der Betrachtung zu Grunde gelegt werden soll.

Fig. 15.



Um die Gleichung und Neigung der Tangente zu bestimmen, betrachten wir zwei unendlich benachbarte Punkte der Kurve, deren Träger die Strecken x und $x + dx$ sein mögen (Fig. 15). Dann ist das zwischen beiden

Punkten liegende Kurvenstück seiner Länge und Richtung nach gleich dx, während die Länge allein durch den korrespondierenden Zuwachs von s, durch ds, dargestellt wird. Der Differenzialquotient $x' = \frac{dx}{ds}$ wird eine Strecke von der Länge 1 und der Richtung der Tangente; wir wollen dieselbe etwa die Neigungsstrecke der Kurventangente oder schlechtweg die Neigungsstrecke der Kurve nennen und mit e_α bezeichnen. Dann haben wir also für die Neigungsstrecke im Punkte x den Wert

$$12) \quad . \quad . \quad . \quad e_\alpha = \frac{dx}{ds} = x'.$$

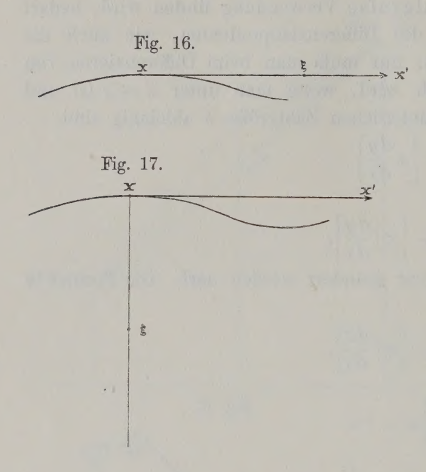


Fig. 16.

Fig. 17.

Ist ferner ξ der Träger eines beliebigen Punktes der Tangente (Fig. 16), so wird $\xi - x$ die Strecke zwischen den Punkten x und ξ, und es lautet somit die Gleichung der Tangente im Punkte x

$$[(\xi - x)\, x'] = 0.$$

Andererseits wird die Gleichung der Normalebene der Kurve (Fig. 17)

$$[(\xi - x)\, |x'] = 0.$$

Zur Ermittelung der Neigung der Hauptnormale nehmen wir auf der Kurve drei Punkte A, B, C an mit den Trägern $x = x_{(s)}$, $x_1 = x_{(s+ds)}$, $x_2 = x_{(s+2ds)}$ (Fig. 18). Dann bestimmen die Strecken $AB = dx$ und $BC = dx_1$, einen Rhombus $ABCD$, dessen Diagonale BD die Hauptnormale darstellt. Es ist aber

$$\begin{aligned} BD &= AD - AB \\ &= dx_1 - dx \\ &= d^2 x. \end{aligned}$$

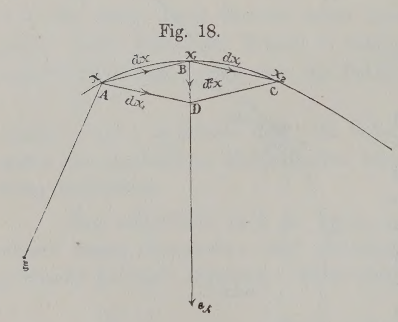


Fig. 18.

Die Neigung e_λ der Hauptnormale ergiebt sich somit, wenn wir diese Strecke durch ihre Länge, d. h. die Wurzel aus ihrem inneren Quadrat (vgl. Gleich. 6), dividieren. Es wird

$$e_\lambda = \frac{d^2 x}{\sqrt{(d^2 x)^2}},$$

oder, wenn wir wieder $\frac{d^2 x}{ds^2} = x''$ setzen

$$13) \quad . \quad . \quad . \quad e_\lambda = \frac{x''}{\sqrt{x''^2}}.$$

Aus der geometrischen Bedeutung von x'' folgt sofort die Gleichung der Schmiegungsebene, da dieselbe nur auszudrücken hat, dafs die Strecke $\xi - x$ mit dx und $d^2 x$ in einer Ebene liegen mufs. Die Gleichung lautet:

$$[(\xi - x) \cdot dx \cdot d^2 x] = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$14) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [(\xi - x)\, x' x''] = 0.$$

Errichtet man noch auf AB und BC innerhalb der Schmiegungsebene die Mittellote EK und FK (Fig. 19), so wird ihr Durchschnitt K, durch welchen auch noch die Verlängerung von BD hindurchgeht, der Krümmungsmittelpunkt. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke KEF und ABD mit Rücksicht auf 6) für die Länge r des Krümmungsradius die Proportion

$$\frac{r}{ds} = \frac{ds}{\sqrt{(d^2 x)^2}},$$

und hieraus

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2 x)^2}},$$

oder

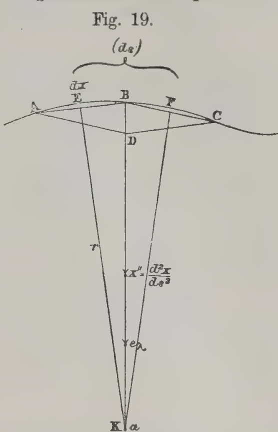
$$15) \quad \ldots\ldots \quad r = \frac{1}{\sqrt{x''^2}}.$$

Die Krümmung der Kurve wird somit

$$16) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{r} = \sqrt{x''^2}$$

d. h. gleich der Länge von x''. x'' ist also eine Strecke, welche die Richtung der Hauptnormale hat und so gewissermaſsen die Richtung der Krümmung anzeigt, deren Länge aber die Krümmung der Kurve darstellt. Man könnte diese Strecke daher passend als Krümmungsstrecke der Kurve bezeichnen.

Fig. 19.



Um noch den Träger a des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen, bemerken wir, daſs

$$a - x = r \cdot e_\lambda$$

ist. Nach Formel 13) ist aber

$$e_\lambda = \frac{x''}{\sqrt{x''^2}},$$

oder mit Rücksicht auf 15)

$$17) \quad \ldots\ldots \quad e_\lambda = r \cdot x''.$$

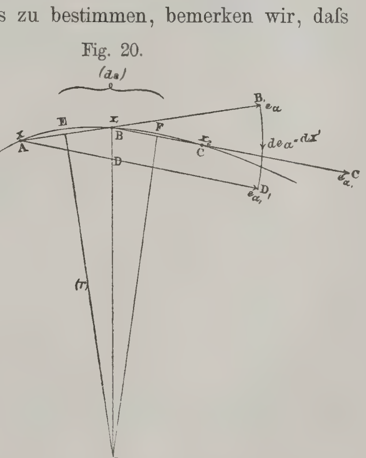
Es wird daher

$$18) \quad \ldots \quad a - x = r^2 x'',$$

oder endlich, wenn wir wieder für r seinen Wert aus 15) einführen,

$$19) \quad \ldots \quad a - x = \frac{x''}{x''^2}.$$

Fig. 20.



Es erübrigt noch, die Krümmung der Kurve mittelst des Kontingenzwinkels, d. h. des Winkels auszudrücken, welchen zwei unendlich benachbarte Tangenten miteinander bilden. Stellt in Fig. 20 die Strecke

$$AB_{,} = e_\alpha = x'$$

die Neigung der Kurve im Punkte x und

$$BC_{,} = AD_{,} = e_{\alpha_{,}} = x_{,}'$$

die Neigung im Punkte $x_{,}$ dar, so wird die Strecke

$$B_{,} D_{,} = e_{\alpha_{,}} - e_\alpha = x_{,}' - x'$$
$$= de_\alpha = dx'.$$

Die Länge von B, D ist aber offenbar zugleich der Ausdruck für den Kontingenzwinkel $d\tau$, so dafs wir erhalten

$$20) \quad \ldots \ldots \ldots \quad d\tau = \sqrt{(de_\alpha)^2} = \sqrt{(dx')^2}.$$

Da ferner die Richtung von de_α mit der Richtung der Hauptnormale übereinstimmt, so ergiebt sich für die Strecke de_α die einfache Formel

$$21) \quad \ldots \ldots \ldots \quad de_\alpha = e_\lambda\, d\tau.$$

Unter Benutzung von ähnlichen Dreiecken gelangen wir dann schliefslich wieder zur Krümmung der Kurve. Es folgt aus den Dreiecken KEF und $AB,D,$

$$22) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds},$$

und hieraus mit Rücksicht auf 20) wieder wie oben

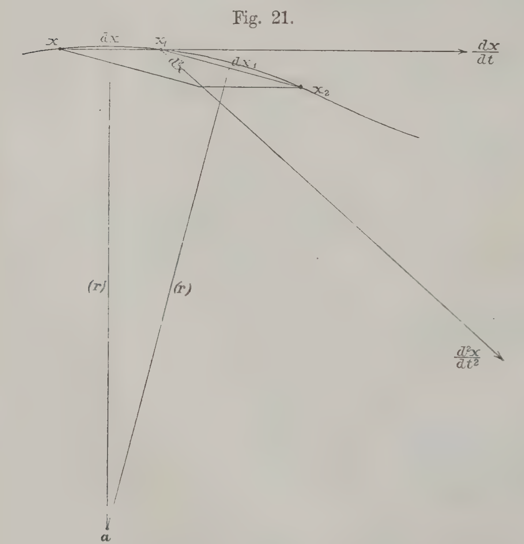
$$\frac{1}{r} = \sqrt{x''^2}.$$

Unsere Formeln werden etwas verwickelter, wenn wir nicht mehr den Bogen s, sondern eine beliebige andere Gröfse t als unabhängige Variable zu Grunde legen, die Kurvengleichung also in der Form

$$23) \quad . \; . \quad x = x_{(t)}$$

voraussetzen. Am wenigsten ändern sich diejenigen Formeln, welche nur den ersten Differenzialquotienten von x enthalten; denn auch jetzt noch stellt $\frac{dx}{dt}$ ein Stück der Tangente dar (Fig. 21), nur ist dessen Länge nicht mehr gleich 1. Um daher die Neigung e_α der Tangente zu erhalten, müssen wir die Strecke $\frac{dx}{dt}$ mit ihrer Länge, d. h mit $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$ oder, was dasselbe ist, mit $\frac{ds}{dt}$ dividieren. Es wird also die Neigung der Tangente

Fig. 21.



$$24) \quad . \; . \quad e_\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dx}{ds}.$$

Die Gleichung der Tangente wird wieder

$$\left[(\xi - x)\,\frac{dx}{dt}\right] = 0,$$

die der Normalebene

$$\left[(\xi - x) \,|\, \frac{dx}{dt}\right] = 0.$$

Auch die Gleichung der Schmiegungsebene ändert ihre Form nicht. Denn sind wieder

$$25) \quad \ldots \ldots \quad x = x_{(t)}, \; x_1 = x_{(t+dt)}, \; x_2 = x_{(t+2dt)}$$

die Träger der drei Punkte, durch welche diese Ebene hindurchgehen soll, so mufs dieselbe zugleich die Strecken $dx = x_1 - x$ und $dx_1 = x_2 - x_1$ und somit endlich auch die Strecke $d^2x = dx_1 - dx$ enthalten. Die Gleichung der Schmiegungsebene lautet also

$$26) \quad \ldots \ldots \quad \left[(\xi - x) \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right] = 0.$$

Um den Radius und den Mittelpunkt des Krümmungskreises zu ermitteln, schlagen wir diesmal zunächst ein mehr rechnerisches Verfahren ein. Wir stellen die allgemeinen Gleichungen eines Kreises auf und bestimmen die in denselben vorkommenden Parameter derart, dafs der Kreis durch die drei Nachbarpunkte x, x_1, x_2 hindurchgehen mufs. Am einfachsten erscheint es dabei, den Kreis als Durchschnitt der Schmiegungsebene mit derjenigen Kugel darzustellen, welche die drei Punkte x, x_1, x_2 enthält und ihren Mittelpunkt in der Schmiegungsebene selbst hat; denn diese Kugel hat den Radius und Mittelpunkt mit dem Kreise gemeinsam. Ihre Gleichung wird, wenn a den Träger ihres Mittelpunktes, r die Länge ihres Radius bezeichnet,

$$(\xi - a)^{\underline{2}} = r^2.$$

Zur Bestimmung der Parameter a und r ergeben sich zuerst die drei Gleichungen, welche ausdrücken, dafs die Kugel durch die drei Punkte hindurchgeht, nämlich:

$$\text{I)} \quad \ldots \ldots \quad (x - a)^{\underline{2}} = r^2.$$

An Stelle der beiden anderen Gleichungen $(x_1 - a)^{\underline{2}} = r^2$ und $(x_2 - a)^{\underline{2}} = r^2$ können wir auch diejenigen Gleichungen setzen, welche aus I) bei ein- und zweimaliger Differenziation nach t hervorgehen, d. h. die Gleichungen

$$\text{II)} \quad \ldots \ldots \quad \left[(x - a) \,|\, \frac{dx}{dt} \right] = 0$$

und

$$\left[(x - a) \,|\, \frac{d^2x}{dt^2} \right] + \left(\frac{dx}{dt} \right)^{\underline{2}} = 0,$$

von denen die letzte mit Rücksicht auf die Formel

$$27) \quad \ldots \ldots \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^{\underline{2}} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

auch geschrieben werden darf:

$$\text{III)} \quad \ldots \ldots \quad \left[(x - a) \,|\, \frac{d^2x}{dt^2} \right] = - \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Viertens kommt dann noch die Gleichung hinzu, welche ausdrückt, dafs der Mittelpunkt der Kugel in der Schmiegungsebene liegt:

$$\text{IV)} \quad \ldots \ldots \quad \left[(x - a) \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \right] = 0.$$

Diese vier Gleichungen reichen zur Bestimmung der Strecke a und des Krümmungsradius r gerade aus; während nämlich II), III) und IV) den Träger des Krümmungsmittelpunktes liefern, wird uns I) den Wert von r ergeben. Zufolge der Gleichung IV) mufs sich $x - a$ als Vielfachensumme von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ darstellen lassen; wir setzen daher

$$†) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x - a = \lambda \frac{dx}{dt} + \mu \frac{d^2x}{dt^2},$$

worin noch λ und μ mit Hülfe der Gleichungen II) und III) zu bestimmen sind. Um die Gleichung II) zu verwerten, multiplizieren wir †) innerlich mit $\frac{dx}{dt}$ und erhalten:

$$0 = \lambda \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \mu \left[\frac{dx}{dt} \middle| \frac{d^2x}{dt^2}\right]$$

oder, wenn wir die Gleichung 27) und die aus ihr durch Differenziation hervorgehende Gleichung

$$28) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left[\frac{dx}{dt} \middle| \frac{d^2x}{dt^2}\right] = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2}$$

berücksichtigen,

$$0 = \lambda \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2}$$

oder schliefslich

$$a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0 = \lambda \frac{ds}{dt} + \mu \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Um andererseits die Gleichung III) zu verwenden, multiplizieren wir †) innerlich mit $\frac{d^2x}{dt^2}$, wodurch sich ergiebt

$$-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \lambda \left[\frac{dx}{dt} \middle| \frac{d^2x}{dt^2}\right] + \mu \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2$$

oder

$$b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \lambda \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \mu \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2.$$

Aus a) und b) resultieren für λ und μ die Werte

$$\lambda = \frac{\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}, \qquad \mu = \frac{-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in †) folgt schliefslich

$$29) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x - a = \frac{\frac{ds}{dt}\left\{\frac{d^2s}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}\right\}}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}.$$

Zufolge der Gleichung I) erhalten wir endlich den Wert von r^2 durch innere Quadrierung des Ausdrucks 29). Berücksichtigen wir dabei, dafs

$$\left\{\frac{d^2s}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}\right\}^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left\{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\right\}$$

wird, so ergiebt sich

$$r^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}$$

oder

$$30) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}$$

Unsere Formeln 29) und 30) lassen übrigens auch eine mehr geometrische Ableitung zu. Sei $ABCD$ das durch die drei Punkte x, x_1, x_2 bestimmte Parallelogramm (Fig. 22), so sind wieder

die Strecken $AB = dx$,
$BC = dx_1$,
$BD = d^2x$, ferner ist
die Länge von $AB = ds$ und
die Länge von $BC = ds_1$.

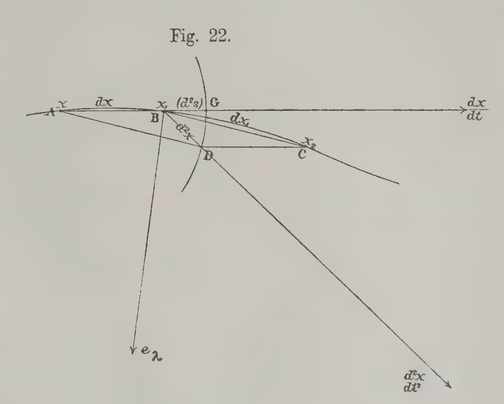


Fig. 22.

Um nun eine Strecke von der Richtung der Hauptnormale zu konstruieren, verlängere man AB bis zum Punkte G, so dafs

die Länge von $AG = ds_1$ und somit
die Länge von $BG = d^2s$ wird, und ziehe

GD, so steht diese Strecke (wenigstens wenn wir zur Grenze übergehen) auf AG senkrecht und hat also, da sie zugleich der Schmiegungsebene angehört, in der That die Richtung der Hauptnormale. Die Neigung der Hauptnormale werden wir daher erhalten, wenn wir die Strecke GD durch ihre Länge dividieren. Nun ist

die Neigung von AB, $e_\alpha = \frac{dx}{ds}$, es wird mithin

die Strecke $BG = d^2s \cdot \frac{dx}{ds}$, also

die Strecke $GD = BD - BG$,

$$= d^2x - d^2s \cdot \frac{dx}{ds},$$

$$= \frac{d^2x \cdot ds - d^2s \cdot dx}{ds}.$$

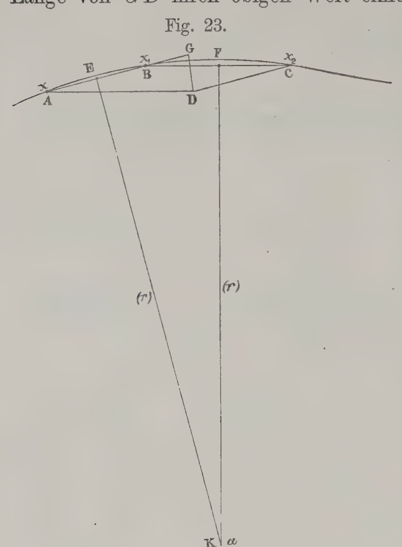
Ferner ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDG

die Länge von $GD = \sqrt{(d^2x)^2 - (d^2s)^2}$ und also schliefslich die Neigung der Hauptnormale

$$31) \quad \ldots \quad e_\lambda = \frac{d^2x\, ds - d^2s\, dx}{ds\,\sqrt{(d^2x)^2 - (d^2s)^2}} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}$$

Die Länge r des Krümmungsradius läfst sich jetzt wieder wie oben aus zwei ähnlichen Dreiecken KEF und AGD entnehmen (Fig. 23). Aus ihnen folgt, wenn wir gleich für die Länge von GD ihren obigen Wert einführen:

Fig. 23.



$$\frac{r}{ds + \frac{d^2 s}{2}} = \frac{ds + d^2 s}{\sqrt{(d^2 x)^2 - (d^2 s)^2}}.$$

Diese Proportion liefert bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Gröfsen höherer Ordnung für r wieder den Wert

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2 x)^2 - (d^2 s)^2}} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2}}.$$

Berücksichtigen wir endlich, dafs $a - x = re_\lambda$ ist, und setzen in diese Gleichung für r und e_λ ihre soeben gefundenen Werte ein, so erhalten wir für den Träger a des Krümmungsmittelpunktes in Übereinstimmung mit 29) die Formel

$$a - x = \frac{\frac{ds}{dt}\left\{\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{ds}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2}\right\}}{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2}.$$

Dritter Abschnitt.

Weitere Hülfsmittel aus der Ausdehnungslehre.

Bevor wir in der Betrachtung der Raumkurven fortfahren, wird es notwendig, die Hülfsmittel aus der Ausdehnungslehre noch etwas weiter zu entwickeln. Wir knüpfen dabei an den Begriff der Ergänzung an, der uns bereits oben zu einer neuen Produktbildung geführt hat. Derselbe läfst sich noch nach einer anderen Seite hin fruchtbar machen. Wir übertragen ihn zunächst auch auf Flächenräume und verstehen unter der Ergänzung eines Flächenraumes $[ab]$, geschrieben $|[ab]$, nichts anderes als diejenige Strecke c, deren Ergänzung der Flächenraum $[ab]$ ist. Wenn also

32) . . . . $[ab] = |c$

ist, so setzen wir andererseits

33) . . . . $|[ab] = c$,

sodafs die Gröfse $|[ab]$ eine Strecke darstellt, welche senkrecht steht auf $[ab]$, und deren Längenzahl gleich der Flächenzahl von $[ab]$ ist. Aus diesen beiden Definitionsformeln folgen unmittelbar noch die weiteren Gleichungen

34) . . . . $||c = c$

und

35) . . . . $||[ab] = [ab]$,

welche aussagen, dafs die zweimalige Bildung der Ergänzung zu der ursprünglichen Strecke oder dem ursprünglichen Flächenraum zurückführt. Wie nun oben (vgl. S. 7) der Begriff der Ergänzung

einer Strecke zur inneren Multiplikation zweier Strecken hinleitete, so gelangen wir auch hier von der Ergänzung eines Flächenraums zur inneren Multiplikation zweier Flächenräume. Wir schreiben nämlich wieder anstatt des äufseren Produktes $\left[[ab]\cdot|[cd]\right]$ einfach $\left[[ab]|[cd]\right]$ oder noch kürzer $[ab|cd]$ und nennen diesen Ausdruck das innere Produkt der Flächenräume $[ab]$ und $[cd]$, so dafs wir die Definitionsformel erhalten

36) . . . . $[ab|cd]=\left[[ab]\cdot|[cd]\right].$

Wir verstehen also unter dem inneren Produkt zweier Flächenräume nichts anderes als das äufsere Produkt aus dem ersten und der Ergänzung des zweiten Flächenraums.

Auf Grund dieser Erklärungen seien nun einige Grundformeln für die inneren Produkte von Flächenräumen zu entwickeln.

Aufg. 1. Den Wert von $[ab]^2$ zu bestimmen. Wir setzen

$[ab]=|c$, dann ist nach obigem
$|[ab]=c$. Es wird somit

$$[ab]^2=[ab|ab]=[ab\cdot c]=[c\cdot ab]=[c|c]=\mathfrak{c}^2.$$

Nun ist die Längenzahl $\mathfrak{c}$ von c gleich der Flächenzahl von $[ab]$, d. h. $=\mathfrak{a}\mathfrak{b}\sin(ab)$; wir bekommen somit

$$[ab]^2=\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\sin^2(ab),$$
$$=\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2-\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\cos^2(ab)$$

oder mit Rücksicht auf 4) und 6)

37) . . . . $[ab]^2=a^2\,b^2-[a|b]^2.$

In dem Falle, wo a auf b senkrecht steht, vereinfacht sich die Formel 37), da dann das zweite Glied der rechten Seite verschwindet, und wir erhalten die (nur für den genannten Fall gültige) Spezialformel

37a) . . . . $[ab]^2=a^2\,b^2.$

Nebenbei folgt noch aus der obigen Entwickelung die Formel

38) . . . . $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\sin(ab)=\sqrt{[ab]^2}.$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber die Flächenzahl des Produktes $[ab]$ dar, und die Formel 38) drückt somit den Satz aus: Man findet die Flächenzahl eines Flächenraumes, indem man aus seinem inneren Quadrat die Wurzel zieht (vgl. Formel 6).

Aufg. 2. Es seien die Werte von $[|a]^2$ und $[|ab]^2$, d. h. die inneren Quadrate der Ergänzungen einer Strecke und eines Flächenraumes zu bestimmen. Es ist

39) . . . . $\begin{cases}[|a]^2=[|a||a]=[|a\cdot a]=[a|a]=a^2;\ \text{ferner}\\ [|ab]^2=[|ab||ab]=[|ab\cdot ab]=[ab|ab]=[ab]^2.\end{cases}$

Aufg. 3. Es sei zu zeigen, dafs wie bei der Ergänzung von Strecken, so auch bei der Ergänzung von Flächenräumen das Ergänzungszeichen distributiv ist, dafs also die Gleichung besteht

40) . . . . $|([ab]+[cd])=|[ab]+|[cd].$

Wir setzen $|[ab]=e$ und $|[cd]=f$, so dafs also
$[ab]=|e$ und $[cd]=|f$ wird. Dann ist
$[ab]+[cd]=|e+|f$, d. h. nach Formel 3)
$=|(e+f)$; somit

$$|([ab]+[cd])=||(e+f)=e+f=|[ab]+|[cd].$$

Aufg. 4. Es sei die Formel zu beweisen:

41) . . . . $[cd \mid ab] = [ab \mid cd]$,

welche aussagt, dafs man in dem inneren Produkt zweier Flächenräume die Faktoren ohne Wertänderung des Produktes vertauschen darf. Benutzen wir wieder dieselben Bezeichnungen wie in Aufg. 3, so wird

$$[cd \mid ab] = \Big[cd \cdot |[ab]\Big] = [cd \cdot e] = [e \cdot cd] = [e \cdot |f] = [e \mid f] = [f \mid e]$$
$$= [f \cdot ab] = [ab \cdot f] = \Big[ab \cdot |[cd]\Big] = [ab \mid cd].$$

Nachdem so der Begriff des inneren Produktes eine weitere Ausgestaltung gefunden, bedarf zweitens auch die äufsere Multiplikation einer Ausdehnung und Weiterbildung. Namentlich sei der Begriff eines vierfaktorigen Streckenproduktes festzustellen, d. h. es sei einmal das Produkt eines Körperraums und einer Strecke zu erklären und zweitens das Produkt zweier Flächenräume. Man könnte vielleicht zunächst erwarten, dafs es bei der Aufstellung dieser Definitionen vor allem darauf ankomme, dieselben so einzurichten, dafs die Rechnungsgesetze der zwei- und dreifaktorigen Produkte möglichst erhalten bleiben, so dafs also z. B. $[abc\,(\alpha a + \beta b + \gamma c)] = 0$ wird. Indes erscheint dies einerseits für die Weiterentwickelung unserer Methoden wenig förderlich, da dann überhaupt jedes vierfaktorige Produkt $[abcd]$ verschwinden würde, denn jede Strecke d läfst sich als Vielfachensumme dreier beliebigen, nicht derselben Ebene parallel laufenden Strecken a, b, c darstellen. Andererseits aber haben wir auch bei der Definition jener Produkte nicht mehr völlig freie Hand, sondern sind wenigstens betreffs des Produktes eines Körperraums und einer Strecke bereits durch frühere Festsetzungen gebunden. Wie wir oben sahen (vgl. S. 5), hat schon das dreifaktorige Streckenprodukt gewissermafsen seinen ausdehnungsmäfsigen Charakter verloren und stellt sich als blofse Zahl dar. Ist daher λ der Zahlwert eines solchen Produktes $[abc]$, so erscheint es geboten, unter dem Produkte $[abc]d$ nichts anderes zu verstehen als das λ-fache der Strecke d. Wenn hiernach die erste Art von vierfaktorigen Produkten als eine Strecke erscheint, so liegt es nahe, auch die zweite Art, nämlich das Produkt zweier Flächenräume in entsprechender Weise zu definieren und darunter etwa die Schnittstrecke jener Flächenräume zu verstehen. Diesem Gedanken geben wir am natürlichsten Ausdruck, wenn wir die Definitionsformel aufstellen

42) . . . . $[\,|a \cdot |b] = |[ab]$,

in welcher, wie man leicht einsieht, in der That die rechte Seite nichts anderes ist als die Schnittstrecke der Flächenräume $|a$ und $|b$. Es reicht aber auch die Formel 42) zur Erklärung der fraglichen Produkte vollständig aus, denn je zwei beliebige Flächenräume $[cd]$ und $[ef]$ lassen sich stets in der Form $|a$ und $|b$ darstellen, und es bleibt somit nur noch zu zeigen, dafs die durch unsere Formel definierte Verknüpfung wirklich eine Multiplikation sei. Namentlich ist nachzuweisen, dafs das Hauptgesetz aller Produktbildungen, welches die Beziehung zur Addition ausdrückt, in Gültigkeit ist, dafs also die Formel besteht

43) . . . . . . $[\,|a \cdot (|b + |c)] = [\,|a \cdot |b] + [\,|a \cdot |c]$.

Es ist nach Formel 3)

$$[\,|a \cdot (|b + |c)] = [\,|a \cdot |(b + c)]$$

und dies nach der Definitionsformel 42)

$$= |[a\,(b + c)]$$

d. h. $= |([ab] + [ac])$
oder nach 40) $= |[ab] + |[ac]$
und dies schließlich wieder nach 42) $= [\,|a\cdot|b] + [\,|a\cdot|c]$.
Damit ist die Berechtigung für die Auffassung unserer Verknüpfung als Multiplikation erwiesen. Übrigens bemerken wir jetzt nachträglich, daß auch die Beziehung unserer neuen Produktbildung zu den zwei- und dreifaktorigen Produkten eine weit engere ist, als es anfangs erscheinen mochte. Denn, wenn auch die Formel $[ab(\alpha a + \beta b)] = 0$ ein voll entsprechendes Gegenstück nicht findet, so bestehen doch wenigstens für die Produkte zweier Flächenräume ganz ähnliche Gesetze wie für die Produkte zweier Strecken. Namentlich wird

44) . . . . $[ab\cdot cd] = 0,$

wenn die Fläche $[ab]$ mit $[cd]$ parallel läuft; andererseits wird

45) . . . . $[cd\cdot ab] = -[ab\cdot cd],$

wie man sofort erkennt, wenn man $[ab]$ und $[cd]$ als Ergänzungen zweier Strecken e und f auffaßt und die Definitionsformel 42) anwendet. Infolge dieser engen Beziehung haben wir bereits das charakteristische Zeichen der äußeren Produkte, die scharfen Klammern, für unsere neue Multiplikation beibehalten und werden im folgenden die beiden Arten der Produktbildung auch unter einem gemeinsamen Namen, nämlich als „räumliche Multiplikation" zusammenfassen, so daß also die äußere Multiplikation sich als ein Spezialfall der räumlichen Multiplikation darstellt.

Wir schließen unsere Entwickelung wieder mit der Ableitung einiger Grundformeln für die neue Produktbildung.

Aufg. 5. Es sei der Wert des Produktes $[\,|a\,|b\,|c]$ zu bestimmen. Es ist

$$[\,|a\,|b\,|c] = \Big[\,|\,[ab]\,|c\Big] \text{ oder, wenn wir } |[ab] = d \text{ setzen,}$$
$$= [d\,|c] = [c\,|d] = [c\cdot|d] = [c\cdot ab] = [abc].$$

Verstehen wir nun endlich noch unter der Ergänzung einer Zahl α nichts anderes als diese Zahl α selber, setzen wir also, $\alpha = \alpha$ und somit auch

46) . . . . $|[abc] = [abc],$

so können wir das gewonnene Resultat auch in der Form schreiben:

47) . . . . $[\,|a\,|b\,|c] = |[abc],$

in welcher die Gleichung genau der Definitionsformel 42) entspricht.

Aufg. 6. An das gewonnene Resultat schließen wir die Ermittelung des Produktes $[ab\,|a\,|b]$ an. Wir setzen $[ab] = |c$, so daß also $|[ab] = c$ wird; dann ist

48) $[ab\,|a\,|b] = [\,|c\,|a\,|b] = [cab] = [abc] = \Big[ab\cdot|[ab]\Big] = [ab\,|ab] = [ab]^2.$

Aufg. 7. Es sei der Wert der Strecke $x = [ab\,|a]$ zu bestimmen*). Die gesuchte Strecke x liegt nach obigem erstens in der Ebene $[ab]$ und ist also darstellbar in der Form

a) . . . . $x = \alpha a + \beta b;$

zweitens steht x senkrecht auf a und genügt somit der Gleichung

b) . . . . $[x\,|a] = 0.$

Da diese beiden Angaben zusammen die Richtung der gesuchten Strecke x vollständig bestimmen, so muß sich x aus denselben bis auf einen die Länge der Strecke ergebenden Faktor ableiten

*) Vgl. hierzu Lüroth, Grundriß der Mechanik (München, Ackermann 1881). S. 40.

lassen. In der That folgt, wenn wir die erste Gleichung innerlich mit a multiplizieren, mit Rücksicht auf die zweite:

$$0 = \alpha a^2 + \beta [a \mid b] \text{ oder}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{[a \mid b]}{a^2}, \text{ also}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\rho [a \mid b] \\ \beta = +\rho a^2 \end{cases} \text{ und es wird daher}$$

$$\dagger) \quad x = [ab \mid a] = \rho \{a^2\, b - [a \mid b]\, b\}.$$

Zur Bestimmung des Faktors ρ benutzen wir die Formel 37)

$$[ab]^2 = a^2\, b^2 - [a \mid b]^2.$$

Die linke Seite unserer Gleichung †) geht nämlich mit Rücksicht auf 48) in $[ab]^2$ über, wenn wir noch innerlich mit b multiplizieren, wodurch sich ergiebt:

$$[ab]^2 = \rho \{a^2\, b^2 - [a \mid b]^2\},$$

so daſs für ρ der Wert 1 und für die gesuchte Strecke x die Schluſsformel

$$49) \quad [ab \mid a] = a^2\, b - [a \mid b]\, a \text{ resultiert.}$$

Um endlich noch die Länge unserer Strecke x zu ermitteln, bilden wir ihr inneres Quadrat und setzen in demselben $[ab] = \mid c$; dann wird

$$[ab \mid a]^2 = [\mid c \mid a]^2 = [\mid ca]^2 = [ca]^2 = c^2\, a^2\,.$$

Es kommt nämlich die Formel 37a) zur Anwendung, da c als Ergänzung von $[ab]$ auf a senkrecht steht. Führen wir nun für c wieder seinen Wert $\mid [ab]$ ein und berücksichtigen 39), so ergiebt sich die Formel

$$50) \quad [ab \mid a]^2 = [ab]^2\, a^2\,,$$

welche die Länge von x durch die Gröſse der Fläche $[ab]$ und die Länge von a ausdrückt.

Vierter Abschnitt.

Nochmalige Behandlung der ersten Krümmung. Zweite Krümmung. Schmiegungskugel.

Als erste Anwendung der neuen im vorigen Abschnitt betrachteten Verknüpfungen lassen wir eine nochmalige Behandlung der bereits oben gelösten Aufgabe folgen, den Träger des Krümmungsmittelpunktes einer Raumkurve zu bestimmen auf Grund der im zweiten Abschnitt aufgestellten vier Gleichungen:

$$\text{I)} \quad (x - a)^2 = r^2$$

$$\text{II)} \quad \left[(x - a) \mid \frac{dx}{dt}\right] = 0$$

$$\text{III)} \quad \left[(x - a) \mid \frac{d^2x}{dt^2}\right] = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\text{IV)} \quad \left[(x - a)\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right] = 0.$$

Von diesen Gleichungen genügen die drei letzten zur Bestimmung von $x - a$. Die Gleichungen II) und IV) nämlich ergeben die Richtung dieser Strecke als Durchschnitt der Normalebene $\mid \frac{dx}{dt}$

und der Schmiegungsebene $\left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right]$, während schließlich III) die Länge von $x - a$ bestimmt. Als Schnittstrecke jener Ebene wird (vgl. S. 18)

$$x - a = \lambda \left[\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\middle|\frac{dx}{dt}\right] \text{ oder nach 49)}$$

$$= \lambda \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^2x}{dt^2} - \left[\frac{dx}{dt}\middle|\frac{d^2x}{dt^2}\right]\frac{dx}{dt} \right\}, \text{ d. h. mit Rücksicht auf 27) und 28)}$$

$$x - a = \lambda \frac{ds}{dt}\left\{ \frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{dt} \right\}.$$

Diese Gleichung stellt in der That die Richtung von $x - a$ vollständig dar, und es erübrigt somit nur noch, durch Substitution des gefundenen Ausdrucks in die Gleichung III) den Faktor λ und damit die Länge von $x - a$ zu ermitteln, wobei sich bei nochmaliger Berücksichtigung der Formel 28) ergiebt:

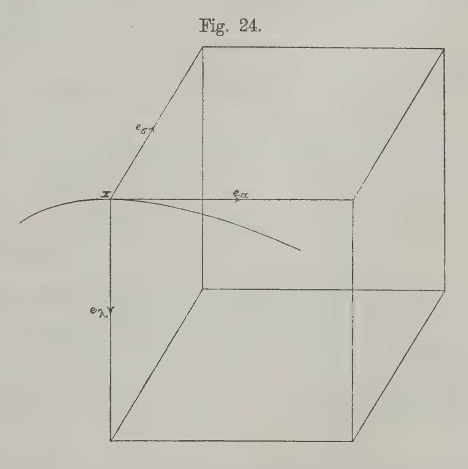
$$\lambda \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left\{ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 \right\} = - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ oder}$$

$$\lambda = \frac{-1}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}. \text{ Endlich wird}$$

$$x - a = \frac{\frac{ds}{dt}\left\{ \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \right\}}{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}.$$

Den Radius des Krümmungskreises findet man hieraus auf Grund der Formel I) durch inneres Quadrieren, wie oben auf Seite 14.

Fig. 24.



Bei der Betrachtung der zweiten Krümmung setzen wir der Einfachheit halber die Gleichung der Kurve wieder in der speziellen Form $x = x_{(s)}$ voraus und bezeichnen (Fig. 24) die Neigung der Tangente im Punkte x mit e_α, die Neigung der Hauptnormale mit e_λ und die Neigung der Normale der Schmiegungsebene mit e_σ. Bei der letzteren Strecke, welche die Stellungsstrecke der Schmiegungsebene oder auch schlechtweg die Stellungsstrecke der Kurve heifsen möge, müssen wir noch eine Bestimmung über ihren „Lauf" hinzufügen, d. h. wir müssen angeben, nach welcher Seite hin diese Normale errichtet werden soll. Indes behalten wir uns diese Angabe noch für später vor, wo sich uns eine naturgemäfse Entscheidung darbieten wird. Wir lassen also den Lauf der Strecke e_σ noch unbestimmt und bekommen so im folgenden zunächst überall ein doppeltes Vorzeichen, eine Zweideutigkeit, welche erst verschwinden wird, wenn wir jene Verfügung über den Lauf von e_σ treffen werden. Aus den Definitionen der drei Strecken e_α, e_λ, e_σ folgen unmittelbar die Gleichungen

51) . . . . $[e_\alpha e_\lambda e_\sigma] = \pm 1$ und

52) . . . . $e_\alpha = \pm \mid [e_\lambda e_\sigma]$,

53) . . . . $e_\lambda = \pm \mid [e_\sigma e_\alpha]$,

54) . . . . $e_\sigma = \pm \mid [e_\alpha e_\lambda]$,

von denen die letzte mit Rücksicht auf 12) und 17) auch geschrieben werden kann

$$e_\sigma = \pm \mid [x' \cdot r x''] \text{ oder}$$

55) . . . . $e_\sigma = \pm r \mid [x' x'']$.

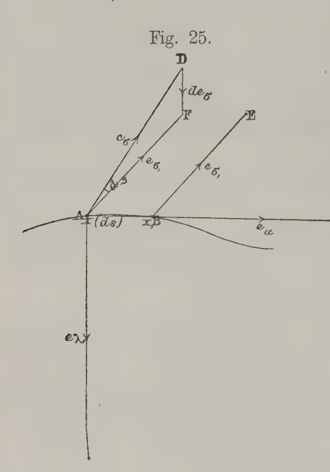


Fig. 25.

Zwei unendlich benachbarte Stellungsstrecken e_σ und $e_\sigma + de_\sigma$ (Fig. 25) schliefsen einen unendlich kleinen Winkel $d\vartheta$ ein, den wir den Torsionswinkel nennen wollen. Den Differenzialquotienten $\frac{d\vartheta}{ds}$ bezeichnen wir als die zweite Krümmung oder Torsion der Kurve, den reziproken Wert derselben nennen wir den Torsionshalbmesser und bezeichnen ihn mit R, so dafs man die Gleichung hat

56) . . . . . $\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}$.

Die Bestimmung des Torsionswinkels $d\vartheta$ gestaltet sich wieder genau so wie die des Kontingenzwinkels. Stellt nämlich

die Strecke $AD = e_\sigma$ die Stellung der Schmiegungsebene im Punkte x und

die Strecke $BE = AF = e_{\sigma_1}$, die Stellung derselben im Punkte x_1 dar, so wird

die Strecke $DF = e_{\sigma_1} - e_\sigma$
$= de_\sigma$.

Die Länge dieser Strecke ist aber der Ausdruck für den Torsionswinkel, so dafs sich die Formel ergiebt

57) . . . . $d\vartheta = \sqrt{(de_\sigma)^2}$,

und somit für die zweite Krümmung der Wert resultiert

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sqrt{(de_\sigma)^2}}{ds}, \text{ oder wenn wir } \frac{de_\sigma}{ds} = e_\sigma' \text{ setzen,}$$

58) . . . . . . $\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds} = \sqrt{e_\sigma'^2}$ = der Länge von e_σ', d. h. die Torsion der Kurve wird durch die Länge des Differenzialquotienten der Stellungsstrecke dargestellt.

Um nun diesen Differenzialquotienten zu ermitteln, könnte man die Gleichung 55) differenzieren. Wir wählen indes ein anschaulicheres Verfahren. Die Stellungsstrecke e_σ ist definiert als eine Strecke, welche die Länge 1 besitzt und auf der Schmiegungsebene, d. h. auf den Strecken x' und x'' senkrecht steht. Diese Angaben, welchen die Gleichungen entsprechen

a) . . . . $e_\sigma^2 = 1$

b) . . . . $[x' \mid e_\sigma] = 0$

c) . . . . $[x'' \mid e_\sigma] = 0$,

bestimmen die Strecke e_σ vollständig bis auf ihren Durchlaufungssinn, den wir ja auch noch unbestimmt gelassen haben. Die Strecke e_σ' wird sich daher, ebenfalls wieder abgesehen von

ihrem Durchlaufungssinn, ergeben müssen aus den drei Gleichungen, welche durch Differenziation aus a), b), c) hervorgehen, d. h. aus den Gleichungen

a') . . . . $[e_\sigma \,|\, e_\sigma'] = 0$

b') . . . . $[x' \,|\, e_\sigma'] = 0$

c') . . . . $[x'' \,|\, e_\sigma'] = -[x''' \,|\, e_\sigma]$.

In der That bestimmen die ersten beiden von diesen Gleichungen die Richtung der Strecke e_σ' (immer abgesehen vom Durchlaufungssinn), während die dritte Gleichung die Länge von e_σ' liefert. Zufolge der Gleichungen a') und b') steht e_σ' senkrecht auf den Strecken e_σ und x', fällt also in die Richtung von x''; wir können daher die Gleichung ansetzen

59) . . . . $e_\sigma' = \mu x''$.

Zur Ermittelung des die Länge von e_σ' bedingenden Faktors μ setzen wir den Wert 59) in die Gleichung c') ein und erhalten $\mu x''^2 = -[e_\sigma \,|\, x''']$; und substituieren wir hierin für e_σ seinen Wert aus 55) und auf der linken Seite für x''^2 seinen Wert aus 16), so folgt

$$\frac{\mu}{r^2} = \mp r \left[\,|\, [x'x''] \,|\, x''' \right] \text{ oder}$$

$$\mu = \mp r^3 [x'x''x'''], \text{ also schliefslich}$$

60) . . . . $e_\sigma' = \mp r^3 [x'x''x'''] x''$.

Der Vergleich dieser Formel 60) mit der Gleichung

17) . . . . $e_\lambda = r x''$ lehrt, dafs die Strecke e_σ' der Strecke e_λ, d. h. der Neigung der Hauptnormale parallel läuft. Um diese Beziehung noch enger zu gestalten, verfügen wir jetzt über den Lauf von e_σ, welcher ja bisher unbestimmt gelassen war, derart, dafs e_σ' mit e_λ, folglich auch mit x'' auch nach derselben Seite läuft. Das geschieht offenbar, wenn wir in unsern sämtlichen Formeln mit doppeltem Vorzeichen bei negativem $[x'x''x''']$ das obere, bei positivem $[x'x''x''']$ das untere Vorzeichen wählen. Die gefundene Beziehung zwischen der Strecke e_σ' und der Neigung der Hauptnormale ermöglicht es, neben die Formel 60) noch einen zweiten Ausdruck für die Strecke e_σ' zu stellen. Nach Formel 58) ist die Länge von $e_\sigma' = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{R}$; wir erhalten daher für die Strecke e_σ' den zweiten Wert

61) . . . $e_\sigma' = \frac{d\vartheta}{ds} \cdot e_\lambda = \frac{1}{R} \cdot e_\lambda$,

eine Formel, die wir, um die Analogie mit der Gleichung

21) . . . $de_\alpha = e_\lambda \cdot d\tau$

herzustellen, auch schreiben können in der Form

62) . . . $de_\sigma = e_\lambda \cdot d\vartheta$.

Fig. 26.

Nach dieser Gleichung ist (Fig. 26) de_σ eine Strecke von der Richtung der Hauptnormale, deren Länge gleich der Gröfse des Torsionswinkels ist, während de_α bei gleicher Richtung durch ihre Länge die Gröfse des Kontingenzwinkels darstellte. Um neben den Ausdrücken für de_α und de_σ drittens auch noch die Strecke de_λ zu entwickeln, differenzieren wir die Gleichung 53), wodurch

sich ergiebt

$$de_\lambda = \pm \mid [de_\sigma \cdot e_\alpha] \pm \mid [e_\sigma \cdot de_\alpha]$$

oder, wenn wir für de_σ und de_α ihre obigen Werte einführen,

$$= \pm d\vartheta \mid [e_\lambda e_\alpha] \pm d\tau \mid [e_\sigma e_\lambda],$$

woraus bei Benutzung der Gleichungen 52) und 54) folgt

63) . . . . $de_\lambda = \mp d\vartheta \cdot e_\sigma \mp d\tau \cdot e_\alpha.$

Es erübrigt noch, aus der Formel 60) auch den Ausdruck für die Länge von $e_\sigma{}'$ und damit für die Gröfse der zweiten Krümmung abzuleiten. Es wird

64) $\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds} =$ der Länge von $e_\sigma{}' = \mp r^3 [x'x''x'''] \sqrt{x''^2} = \mp r^2 [x'x''x'''] = \mp \frac{[x'x''x''']}{x''^2}$,

wobei das doppelte Vorzeichen sogleich in der Weise geschrieben ist, dafs auch hier die obige Zeichenregel gültig bleibt.

Als Anwendung unserer Formeln wollen wir endlich noch die Beantwortung der Frage folgen lassen: Wie ist eine Kurve beschaffen, wenn die erste oder die zweite Krümmung verschwindet? Ist zuerst die erste Krümmung d. h. $\frac{1}{r} = \sqrt{x''^2} = 0$, so ist auch $x'' = 0$, woraus durch Integration folgt $x' =$ const., die Kurve ist also eine gerade Linie; ist andererseits die zweite Krümmung d. h. $\frac{1}{R} = \sqrt{e_\sigma{}'^2} = 0$, so ist auch $e_\sigma{}' = 0$, woraus durch Integration folgt $e_\sigma =$ const., die Kurve ist also eine ebene Kurve, denn alle Schmiegungsebenen haben dieselbe Stellung. Die Bedingung für den letzteren Fall läfst sich übrigens zufolge der Formel 64) auch ausdrücken durch die Gleichung

65) . . . . $[x'x''x'''] = 0,$

welche aussagt, dafs auch x''' in die Schmiegungsebene fällt.

Zum Schlufs folge noch die Behandlung der Schmiegungskugel. Ist ρ ihr Radius, m der Träger ihres Mittelpunktes, so lautet die Gleichung der Schmiegungskugel

$$(\xi - m)^2 = \rho^2,$$

in welcher die Parameter m und ρ aus der Bedingung zu bestimmen sind, dafs die Kugel durch vier Nachbarpunkte der Kurve hindurchgehen soll. Diese Bedingung liefert zunächst die Gleichung

I) . . . . $(x - m)^2 = \rho^2$ und aufserdem die drei aus I) durch ein-, zwei- und dreimalige Differenziation hervorgehenden Gleichungen:

II) . . . . $[(x - m) \mid x'] = 0$

III) . . . . $[(x - m) \mid x''] = -1$

IV) . . . . $[(x - m) \mid x'''] = 0,$

bei deren Bildung zu berücksichtigen ist, dafs $x'^2 = 1$ und $[x' \mid x''] = 0$ ist. Für die Richtung von $x - m$ folgt aus II) und IV) der Wert

$x - m = \mu [\mid x' \mid x''']$ und, wenn wir diesen Ausdruck in III) einführen, so ergiebt sich

$\mu [\mid x' \mid x''' \mid x''] = -1$ oder unter Benutzung von 47)

$\mu [x'x''x'''] = +1$, woraus folgt

$$\mu = \frac{1}{[x'x''x''']} \text{ und}$$

66) . . . . $x - m = \frac{\mid [x'x''']}{[x'x''x''']}.$

Zufolge der Gleichung I) wird dann mit Rücksicht auf 39)

$$67) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \rho^2 = \frac{[x' x''']^2}{[x' x'' x''']^2} \text{ oder nach 37)}$$

$$68) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \rho^2 = \frac{x'^2\, x'''^2 - [x' | x''']^2}{[x' x'' x''']}.$$

Wir können hierin endlich noch den Ausdruck $[x' | x''']$ etwas anders ausdrücken. Differenzieren wir nämlich die Gleichung $x'^2 = 1$ zweimal hintereinander nach s, so folgt zuerst $[x' | x''] = 0$ und bei abermaliger Differenziation $[x' | x'''] = -x''^2$. Setzen wir diesen Wert in die Formel 68) ein und ziehen zugleich die Wurzel, so ergiebt sich für den Radius ρ der Schmiegungskugel der Schlufswert:

$$69) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{\sqrt{x'''^2 - (x''^2)^2}}{[x' x'' x''']}.$$

Damit sind die wichtigsten Sätze aus der allgemeinen Theorie der Raumkurven erledigt und, wie mir scheint, in einer Weise, welche die Brauchbarkeit der Methoden der Ausdehnungslehre für derartige Untersuchungen deutlich hervortreten läfst. Die allgemeine Theorie der krummen Flächen werde ich in einer zweiten Abhandlung auf ähnliche Weise entwickeln.

Halle a. S., den 1. April 1886.

Hermann Grafsmann.
